



Theory of Constraints and Linear Programming

Стас Фомин, stas@custis.ru

Заказные ИнформСистемы

4 августа 2009 г.

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

- 1 Идентифицируйте ограничения системы
- 2 Решите, как эксплуатировать системные ограничения
- 3 Скоординируйте все остальное с принятым решением
- 4 Увеличьте пропускную способность ограничения
- 5 Если на предыдущем этапе ограничение было снято, переходим к первому этапу

Как найти «бутылочное горлышко»?

Иногда, «узкое горло» системных ограничений очевидно:

- Загруженные станки
- Замученные рабочие
- Затоваренные склады
- ...
- Рост различных «буферов»...



Как найти «бутылочное горлышко»?

Но часто — нет.

- Сложный, не визуализированный процесс.
- Несуществующий, проектируемый процесс.

А ведь все меняется! Процессы, бизнес-процессы, ограничения...



Как гонятся за «бегающим бутылочным горлом»?



Неужели только симуляцией на живых моделях?



Как найти «бутылочное горлышко»?

Но часто — нет.

- Сложный, не визуализированный процесс.
- Несуществующий, проектируемый процесс.

А ведь все меняется! Процессы, бизнес-процессы, ограничения...



Как гонятся за «бегающим бутылочным горлом»?



Неужели только симуляцией на живых моделях?



Как найти «бутылочное горлышко»?

Но часто — нет.

- Сложный, не визуализированный процесс.
- Несуществующий, проектируемый процесс.

А ведь все меняется! Процессы, бизнес-процессы, ограничения...



Как гонятся за «бегающим бутылочным горлом»?



Неужели только симуляцией на живых моделях?



Как найти «бутылочное горлышко»?

Но часто — нет.

- Сложный, не визуализированный процесс.
- Несуществующий, проектируемый процесс.

А ведь все меняется! Процессы, бизнес-процессы, ограничения...



• Как гонятся за «бегающим бутылочным горлом»?



• Неужели только симуляцией на живых моделях?





Часто, **хотя и не всегда**, может помочь **математическое моделирование**.

А одна из самых распространенных моделей в матмоделировании:

Линейное Программирование¹

¹Появилось задолго до «нормального» программирования в общепринятом смысле



Часто, **хотя и не всегда**, может помочь математическое моделирование.

А одна из самых распространенных моделей в матмоделировании:

Линейное Программирование¹

¹Появилось задолго до «нормального» программирования в общепринятом смысле

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i : 1 \leq i \leq m,$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j : 1 \leq j \leq n.$$

Giapetto Woodcarving Problem

Giapetto's Woodcarving Inc. производит солдатиков и паровозиков.

Два типа труда:

- Плотник (80 часов в неделю).
- Отделка (100 часов в неделю).

Спрос на паровозики — безграничен, на солдатиков — не больше 40 в неделю.

Солдатики и паровозики

Солдатик:

- Продается по \$27 за штуку,
- Сырье — \$10 на штуку.
- *Затраты* на \$14.
- Плотник: 1 час.
- Отделка: 2 часа.

Паровозик:

- Продается по \$21 за штуку,
- Сырье — \$9 на штуку.
- *Затраты* на \$10.
- Плотник: 1 час.
- Отделка: 1 часа.

Цель

Найти количество² солдатиков и паровозиков, производство которых позволит максимально увеличить прибыль.



²производимых еженедельно

Моделирование: Целевая Функция

x_1 : количество солдатиков

x_2 : количество паровозиков

Прибыль:

$$\begin{aligned} \text{PROFIT} &= (27 - 10 - 14)x_1 + (21 - 9 - 10)x_2 \\ &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$





- Отделка: $2x_1 + x_2 \leq 100$
- Плотник: $x_1 + x_2 \leq 80$
- Спрос: $x_1 \leq 40$
- Реальность: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

 Кстати, что очевидно мы забыли?



- Отделка: $2x_1 + x_2 \leq 100$
- Плотник: $x_1 + x_2 \leq 80$
- Спрос: $x_1 \leq 40$
- Реальность: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

? Кстати, что очевидно мы забыли?

Задача Линейного Программирования

$$3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \text{MAX}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

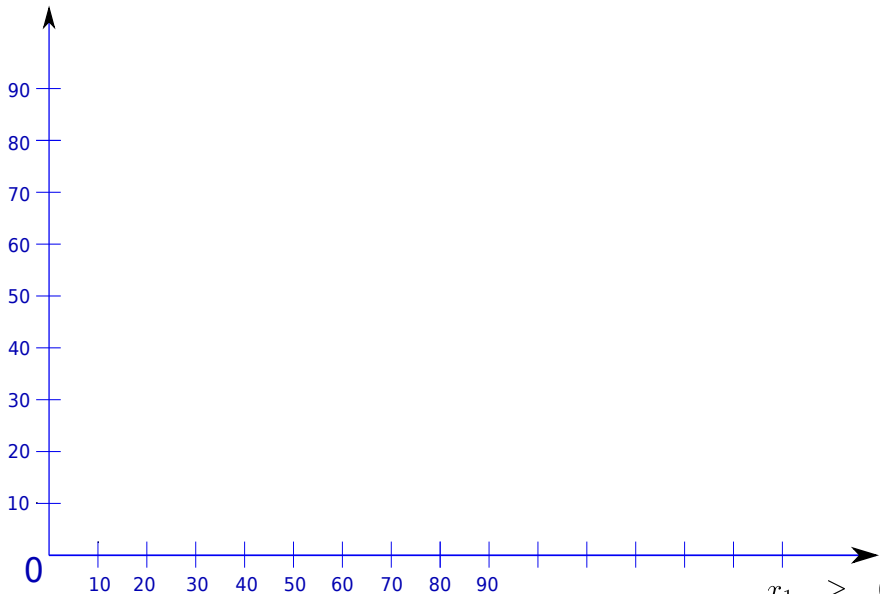
$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

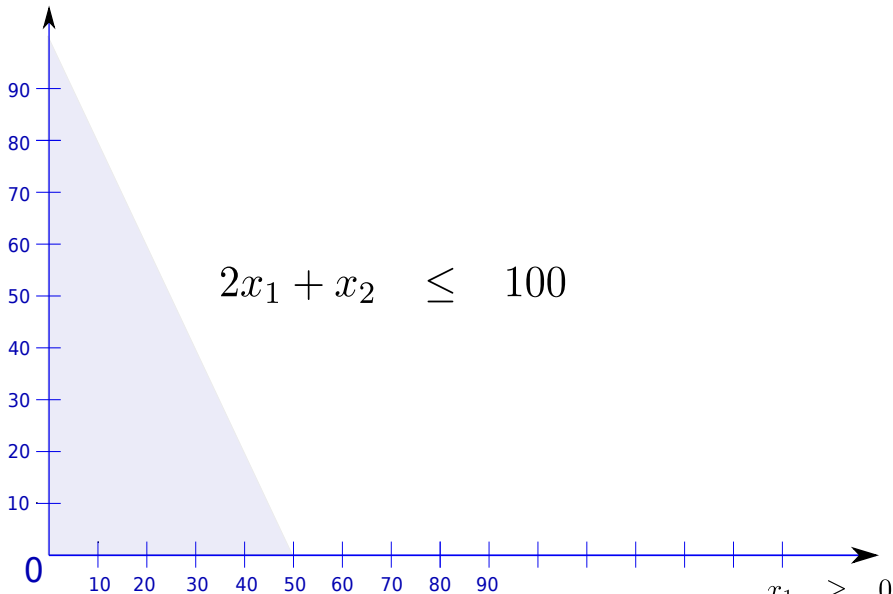
$$x_2 \geq 0$$



$$x_1 \geq 0$$

23 / 45

$$x_2 \geq 0$$



$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0$$

24 / 45

$$x_2 \geq 0$$



$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

90

80

70

60

50

40

30

20

10

0

10

20

30

40

50

60

70

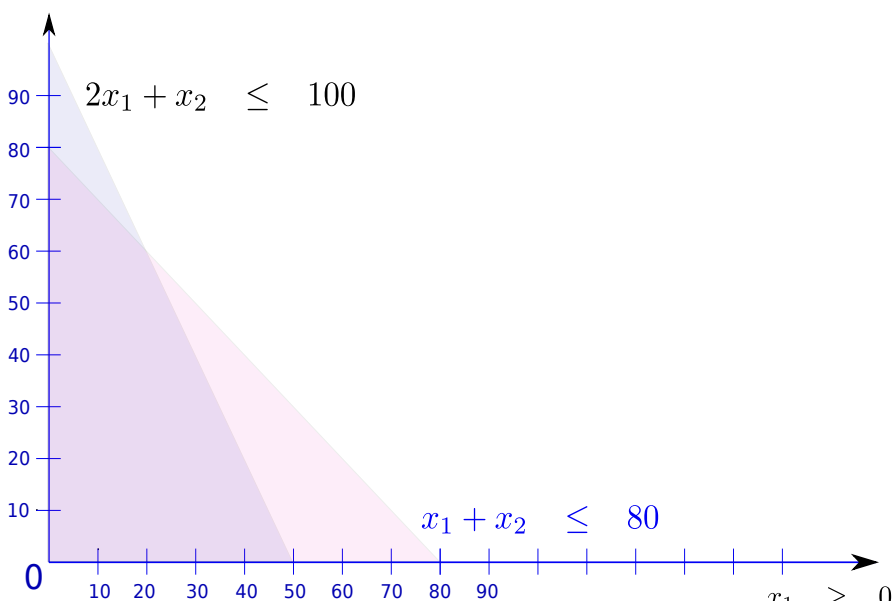
80

90

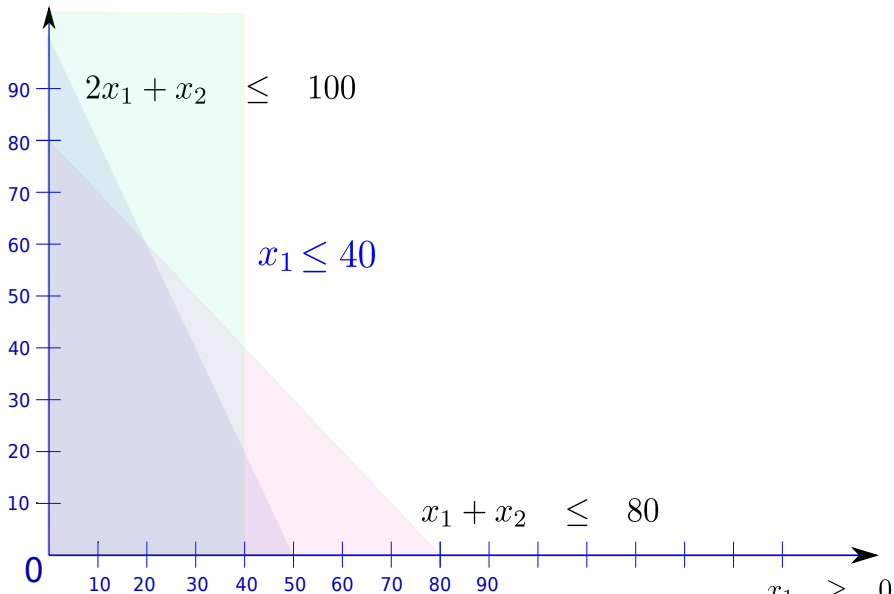
$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0$$

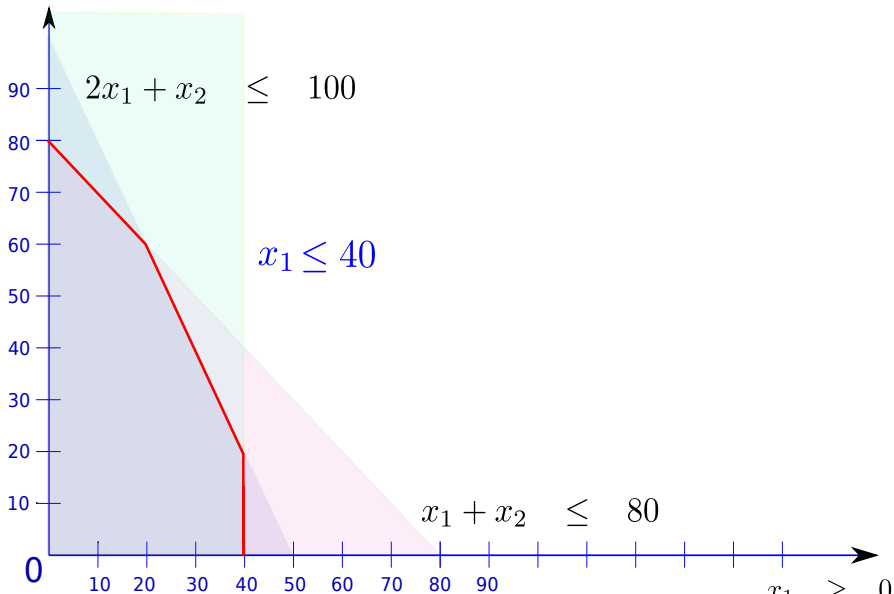
25 / 45



$$x_2 \geq 0$$



$$x_2 \geq 0$$

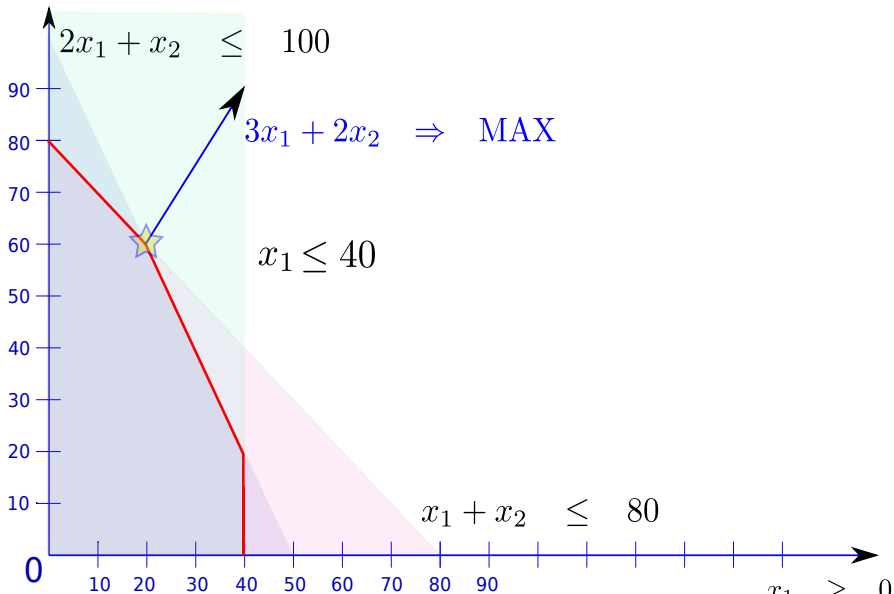


$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0$$

27 / 45

$$x_2 \geq 0$$



$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \text{MAX}$$

$$x_1 \leq 40$$

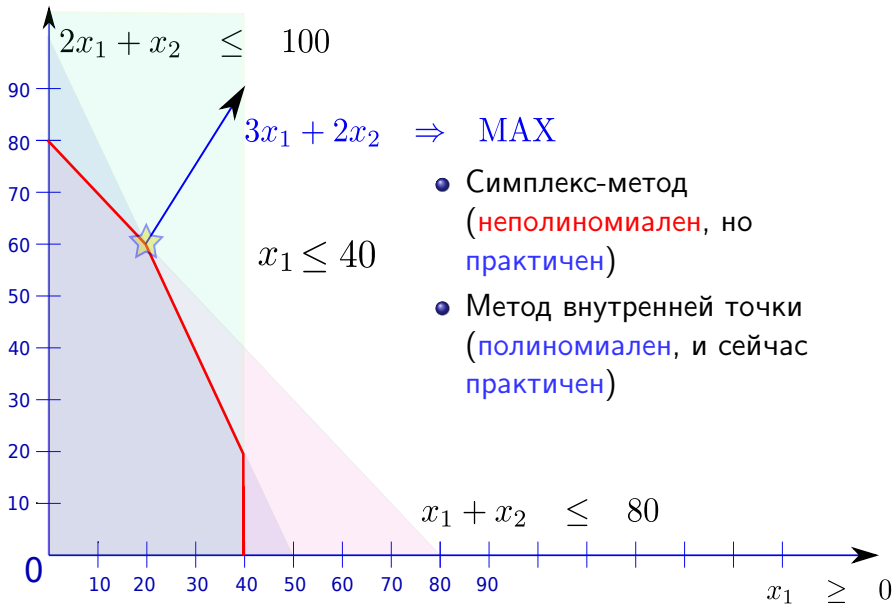
$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0$$

28 / 45

$$x_2 > 0$$

Алгоритмы

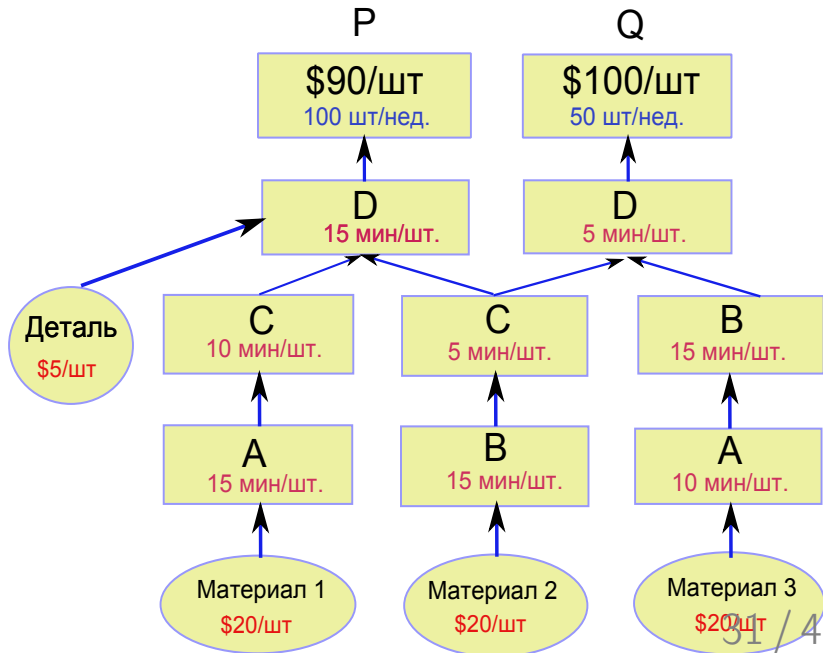


- Симплекс-метод
(неполиномиален, но
практичен)
- Метод внутренней точки
(полиномиален, и сейчас
практичен)

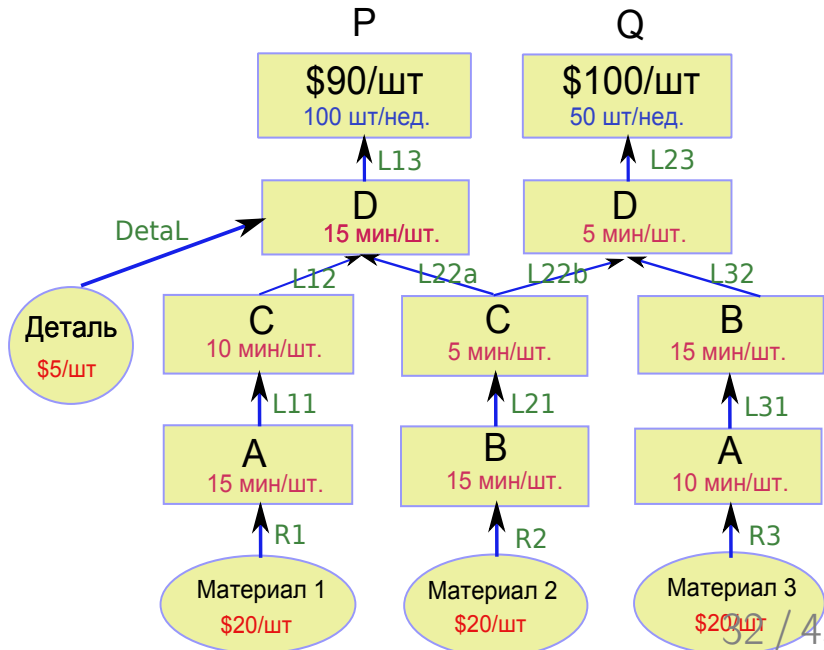
Голдратт: «Синдром иголки в стоге сена»

- Завод выпускает 2 продукта: P и Q.
- Качественная продукция, дефектов нет.
- Цена фиксирована. P — \$90 за штуку, Q — \$100 за штуку.
- Потенциал рынка в неделю: P — 100 штук, Q — 50 штук.
- У оборудования нулевое время перенастройки.
- Каждый ресурс доступен 5 дней в неделю, 8 часов в день, 60 минут в час = 2400 минут в неделю.
- Операционные расходы \$6000 в неделю.

Голдратт: «Синдром иголки в стого сена»



Модель: Введем переменные



А теперь — Практика!



```

/* количество товаров */
var P >=0; var Q >=0;
/* Ресурсы */
var R1 >=0; var R2 >=0; var R3 >=0; var DetaL >=0;
/*Производительность станков*/
var L11>=0; var L12>=0; var L13>=0; var L21>=0; var L22a>=0;
var L22b>=0; var L23>=0; var L31>=0; var L32>=0;
param WEEK default 2400; param COSTS default 6000;
param PriceP default 90; param PriceQ default 100;
param PriceMaterial default 20; param PriceDetaL default 5;
/* функция цели */
maximize
profit: PriceP*P+PriceQ*Q
#
# |-----|-----|-----|
# | COSTS | | | |
# |-----|-----|-----|
# | -PriceMaterial*(R1+R2+R3) # /-----\ /-----\ |
# | -PriceDetaL*DetaL; # | P | Q | DetaL
# | $90/шт | |$100/шт. | |
# |100шт/неделю| |50шт/нед. | |
/*ограничения */
# |-----|-----|-----|
Market_Share_P: P<=100; # | L13 | L23 | |Головая|
Market_Share_Q: Q<=50; # | | | |деталь |
# | | | | |$5/шт |
PLant_Pa: P=L13; # 0-----0 0-----0 )-----|
PLant_Pb: P=DetaL; # | D | D |
# |15 мин/шт| |5 мин/шт|
PLant_Q: Q=L23; # 0-----0 0-----0
/*Граф производственных потоков*/
/*Первая производственная линия*/
# | L12 +-----+ | L22b +-----+ L32
Line_11: R1=L11; # | | |
Line_12: L11=L12; # | C | C | B |
Line_13: L12=L13; # |10 мин/шт| |5 мин/шт| |15 мин/шт|
# 0-----0 0-----0 0-----0
/*Вторая производственная линия*/
# | L11 | L21 | L31
Line_21: R2=L21; # | | |
Line_22: L21=L22a+L22b; # 0-----0 0-----0 0-----0
Line_23a: L22a=L13; # | | |
Line_23b: L22b=L23; # | A | B | A |
# |15 мин/шт| |15 мин/шт| |10 мин/шт|
Line_31: R3=L31; # 0-----0 0-----0 0-----0
Line_32: L31=L32; # | R1 | R2 | R3
Line_33: L23=L32; # | | |
/*Ограничения ресурсов*/
# |-----|-----|-----|
A: 15*L11 + 10*L31 <= WEEK; # |Ресурc 1| |Ресурc 2| |Ресурc 3|
B: 15*L21 + 15*L32 <= WEEK; # | $20/шт | | $20/шт | | $20/шт |
C: 10*L12 + 5*L21 <= WEEK; # |-----|-----|-----|
D: 15*L13 + 5*L23 <= WEEK; #
end;

```

Голдратт: Начальная ситуация с заводом

... Итоговая скорость генерации дохода компании теперь будет 6300\$. Вычтем 6000\$ на операционные расходы. Чистая прибыль той же самой компании — теперь плюс 300\$ в неделю. Плюс или минус, какая разница? ...

ЛП: Начальная ситуация с заводом

Все сходится. $profit = 300$, упираемся³ в ограничение B .

Objective: profit = 300 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	profit	B	6300			
2	Market_Share_P	NU	100		100	15
3	Market_Share_Q	B	30		50	
17	A	B	1800		2400	
18	B	NU	2400		2400	2
19	C	B	1650		2400	
20	D	B	1650		2400	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	P	B	100	0		
2	Q	B	30	0		
3	R1	B	100	0		
4	R2	B	130	0		
5	R3	B	30	0		
6	Detal	B	100	0		

³«NU» — уперлись в *Upper Bound*

Голдратт: Усилим ресурс «В»!

Давайте купим еще одну В машину. ... Если мы собираемся не просто заставить завод оборудованием, а зарабатывать деньги, нужно нанять еще одного специалиста. Предположим мы нашли его. ... Всего \$400 долларов, включая премиальные. ... Поэтому операционные расходы компании возросли до 6400\$ в неделю.

...

Р дает $100 \times 45 = 4500$ долларов, и Q дает еще $50 \times 60 = 3000$ долларов генерации дохода. Итого \$7500. Вычитаем отсюда операционные расходы. Помните теперь они \$6400 потому, что мы наняли еще одного рабочего. Чистая прибыль \$1100 в неделю. Но мы не можем пустить все эти деньги на покрытие инвестиций. До этого мы зарабатывали прибыль. Поэтому вы можем использовать только увеличение чистой прибыли, которая появляется в результате покупки новой машины. Увеличение чистой прибыли составляет $\$1100 - \$300 = \$800$ дополнительной прибыли в неделю.

ЛП: Усилим ресурс «В»!

Все сходится. $profit = 1100$, упираемся в рынок.

Objective: profit = 1100 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	profit	B	7500			
2	Market_Share_P	NU	100		100	45
3	Market_Share_Q	NU	50		50	60
17	A	B	2000		2400	
18	B	B	3000		4800	
19	C	B	1750		2400	
20	D	B	1750		2400	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	P	B	100	0		
2	Q	B	50	0		
3	R1	B	100	0		
4	R2	B	150	0		
5	R3	B	50	0		
6	Detal	B	100	0		

Голдратт: Демпинг в Японии по продукту Р.

... Продажа 100 Р дает 4500 долларов на домашнем рынке, но это требует 1500 минут А. 50 изделий Q на домашнем рынке дадут дополнительные 3000 дохода, и потребуют взамен 5000 минут ресурса А. Это оставляет нам излишек в 400 минут «свободных» минут ресурса А... Давайте "подэмпингуем" в Японии. Сколько Р мы можем произвести на ресурсе А за 400 минут? Около 26 штук. Генерация дохода уже не 45 долларов потому, что мы продаем в Японии. А только $\$72 - \$45 = 27$ долларов дохода. Поэтому продажи в Японии дадут нам **дополнительные 700 долларов** генерации дохода. Стоит ли беспокоиться из-за такого ничтожного количества. Давайте посчитаем. Итоговая генерация теперь $\$8200$. Минус $\$6400$ операционных расходов, минус $\$300$ исходной чистой прибыли, дает изменение чистой прибыли до $\$1500$ в неделю.

ЛП: Демпинг в Японии по продукту Р.

Objective: profit = 1820 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	profit	B	8220			
2	Market_Share_P	NU	100		100	18
3	Market_Share_Q	NU	50		50	42
17	A	NU	2400		2400	1.8
18	B	B	3400		4800	
19	C	B	2150		2400	
20	D	B	2150		2400	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	P	B	100	0		
2	Pjap	B	26.6667	0		
3	Q	B	50	0		
4	R1	B	126.667	0		
5	R2	B	176.667	0		
6	R3	B	50	0		
7	DetaL	B	126.667	0		

Упс! Лишних \$20! Это мы забыли ограничения целочисленности продуктов. [Добавим их!](#)

ЦЛП: Демпинг в Японии по продукту Р.

Теперь все корректно, и мы обогнали Голдратта на \$2!

Objective: profit = 1802 (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	profit	8202		
2	Market_Share_P	100		100
3	Market_Share_Q	50		50
17	A	2390		2400
18	B	3390		4800
19	C	2140		2400
20	D	2140		2400

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	P	*	100	0
2	Pjap	*	26	0
3	Q	*	50	0
4	R1		126	0
5	R2		176	0
6	R3		50	0
7	DetaL		126	0

Голдратт: Демпинг в Японии по продукту Q.

... Давайте попробуем подемпинговать в Японии продуктом Q. Давайте потратим дополнительные 400 минут ресурса А на производство Q. Мы сможем произвести 40 единиц, поскольку этот продукт требует только 10 минут ограничивающего ресурса. Генерация дохода на каждом Q проданном в Японии составляет \$80 минус \$40 за материалы, получается \$40. Значит продажа Q в Японии дает дополнительные 1600\$ чистой прибыли, вместо \$700 полученных с Р. Это увеличение чистой прибыли на \$900. Мы уже спешим в Японию, почему бы не продавать этот выгодный продукт? ИНЕРЦИЯ! Понимаем ли мы значение этого термина? Неужели мы полностью осознаем эти разрушительные риски. Ответ до сих пор НЕТ. С чего это мы вдруг решили, что должны сначала вложиться в продажу на домашних рынках, и только потом экспортировать? Потому, что в нашей картине до этого не было экспорта. ИНЕРЦИЯ! ВОЗВРАЩАЕМСЯ К ШАГУ 1, НО НЕ ДОПУСКАЙТЕ ИНЕРЦИИ.

ЛП: Демпинг в Японии по продукту Q.

Оп-па! Мы обогнали Голдратта на \$300! Он не учел, что можно сбросить не только производство P для Японии, но и P для исходного рынка! Борясь с «инерцией мышления» он сам по инерции попал в ловушку (ограничил продажи P в Японии 40 единицами).

Objective: profit = 3000 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	profit	B	9400			
2	Market_Share_P	B	80		100	
3	Market_Share_Q	NU	50		50	20
17	A	NU	2400		2400	2.5
18	B	NU	4800		4800	0.5
19	C	B	1800		2400	
20	D	B	1800		2400	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	P	B	80	0		
2	Pjap	NL	0	0		-18
3	Q	B	50	0		
4	Qjap	B	70	0		
5	R1	B	80	0		
6	R2	B	200	0		
7	R3	B	120	0		
8	Detal	B	80	0		

ЛП: Учет «оговорку-ограничение» по Qjap.

Проверим — да, если мы введем в нашу модель неявное ограничение Голдратта, что в Японии не продать больше, чем 40 единиц P, мы получим в точности его результат.

Objective: profit = 2700 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	profit	B	9100			
2	Market_Share_P	NU	100		100	18
3	Market_Share_Q	NU	50		50	42
4	Market_Share_Qjap	NU	40		40	22
18	A	NU	2400		2400	1.8
19	B	B	4200		4800	
20	C	B	1950		2400	
21	D	B	1950		2400	

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	P	B	100	0		
2	Pjap	B	0	0		
3	Q	B	50	0		
4	Qjap	B	40	0		
5	R1	B	100	0		
6	R2	B	190	0		
7	R3	B	90	0		
8	Detal	B	100	0		

Выводы

- Человек не рожден для вычислений.
- Рассуждения в литературной форме из-за аббераций восприятия легко уводят от оптимума.
- Поиск оптимума в виде рассуждений трудно верифицировать.
- Если есть возможность — составьте математическую модель. Человеку ее легко верифицировать. А машине — легко⁴ найти решение.

Глобальных всем оптимумов!



⁴Мы опускаем тут вопрос сложности решения задач ЦЛП